Propiedades de las raíces: Aplicación y ejemplos resueltos paso a paso.

Saber utilizar las **propiedades de las raíces** es fundamental para **simplificar operaciones con radicales** correctamente, al mismo tiempo que para realizar operaciones con radicales.

Por tanto, a continuación, veremos una a una, las propiedades de las raíces y cómo tienes que aplicarlas en tus operaciones.

Propiedad 1. Multiplicación de raíces con el mismo índice

Multiplicar dos raíces con el **mismo índice** es igual a realizar la multiplicación en una sola raíz con ese índice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

Por ejemplo, si tienes una multiplicación dentro de una raíz, puedes separar cada factor y resolver cada raíz por separado, para obtener el resultado final:

$$\sqrt[3]{27.125} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 3.5 = 15$$

Esta propiedad va a ser muy útil por ejemplo para entender como **introducir o extraer factores en una raíz.**

Propiedad 2. División de raíces con el mismo índice

Lo mismo sucede con la división de dos raíces con el **mismo índice**. Esa división es equivalente a la raíz de la división.

La raíz de una división es igual a la división de las raíces.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Por ejemplo

$$\sqrt[4]{\frac{256}{625}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{4}{5}$$

Propiedad muy útil también para simplificar operaciones con raíces.

Propiedad 3. Raíz elevada a un exponente

Otra de las propiedades de las raíces es cuando tienes una raíz elevada a un exponente, es equivalente a que ese exponente estuviera dentro de la raíz elevando al radicando:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Por ejemplo:

$$(\sqrt[5]{32})^6 = \sqrt[5]{32^6}$$

Esta propiedad no hay que confundirla, multiplicando el exponente por el índice. Mucho cuidado. Para eso ya tenemos la propiedad que viene a continuación.

Propiedad 4. Raíz de otra raíz

Una raíz elevada a otra raíz es igual a otra raíz cuyo índice es el producto los dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[2.3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Esta propiedad se puede aplicar con todos los niveles de raíces de raíces. Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{x}}} = \sqrt[3.2.4]{x} = \sqrt[24]{x}$$

Propiedad 5. Anulación de la raíz

Como ya sabes, **la raíz es la operación contraria a la potencia.** Entonces si tienes un número o una variable elevada a un exponente que está dentro de una raíz con el mismo índice, la potencia con la raíz se anula:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Esta propiedad parece obvia, pero cuando forma parte de una expresión mucho más compleja, hay veces que se olvida.

Es muy útil para simplificar expresiones cuando trabajamos con variables:

$$\sqrt[5]{x^5} = x$$

El índice y el exponente se anulan y queda sólo la x

Cuando operas con números, esta propiedad la aplicas indirectamente al obtener el resultado de la raíz.

Por ejemplo, en esta raíz:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

El resultado es 2 porque 2 elevado al cubo son 8.

Si aplicamos esta propiedad y en vez de poner 8, lo ponemos como 2 elevado al cubo, vemos que los 3 del índice del exponente y del índice se anulan y queda sólo el 2, que es el resultado de la raíz.

$$\sqrt[3]{2^3} = 2$$

Las propiedades de las raíces cobran más sentido cuando se utilizan con algún fin, ya sea para simplificar una expresión o para realizar operaciones con raíces.

Ejemplos de aplicación de las propiedades de las raíces

Voy a ir resolviendo contigo unos ejercicios para que veas como se tienen que ir aplicando las propiedades de las raíces:

Ejemplo 1:

$$\sqrt[3]{8x^4} =$$

Cuanto tengas una raíz con más de un factor, como es este caso, lo primero que tienes que hacer es aplicar la propiedad de la multiplicación de raíces y separar cada factor en una raíz:

$$= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^4} =$$

Al tenerlo en dos raíces, ya podemos obtener el resultado de la primera raíz que es 2:

$$= 2 . \sqrt[3]{x^4}$$

Ejemplo 2:

Vamos a ver este otro ejemplo con la raíz de una división:

$$\sqrt{\frac{81}{25}} =$$

Para poder resolver esta raíz, mediante la propiedad de la división de raíces, la convertimos en la división de dos raíces para poder resolver cada una de ellas por separado:

$$=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}}=\frac{9}{5}$$

Normalmente, cuando veas una fracción dentro de una raíz, el primer paso será siempre convertirla a una división de dos raíces tal y como acabamos de hacer, pero a veces, se puede simplificar la fracción dentro de la raíz y no es necesario aplicar la propiedad.

Ejemplo 3:

En este ejemplo vamos a tener que aplicar más de una propiedad:

$$\sqrt[3]{\frac{8x^2}{27y^5}}=$$

El primer paso es aplicar la propiedad de la división, por lo que lo convertimos en una división de dos raíces de índice 3:

$$=\frac{\sqrt[3]{8x^2}}{\sqrt[3]{27y^5}}=$$

Ahora, si te das cuenta, tanto en el numerador como en el denominador tenemos una raíz de más de un factor. Por tanto el siguiente paso es aplicar en cada raíz la propiedad de la multiplicación y separarlo en dos raíces:

$$=\frac{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{y^5}}=\frac{2.\sqrt[3]{x^2}}{3.\sqrt[3]{y^5}}$$

Una vez ya no podemos separar en más raíces, ya se puede proceder a resolver la que tenga solución, tal y como acabamos de hacer.

Se podría simplificar todavía más, extrayendo factores.

Ejemplo 4:

En este otro ejemplo de aplicación de las propiedades de las raíces, hay que aplicar también más de una propiedad, pero la forma de aplicarlas funciona de una forma inversa al ejemplo anterior:

$$\frac{\sqrt{6}\,.\sqrt{8x}}{\sqrt{12x}} =$$

En este caso tenemos raíces ya separadas. La raíz de 6 no tiene solución entera. Podríamos aplicar la propiedad de la multiplicación de las raíces de 8x y 12x, pero tampoco tendríamos ninguna solución entera.

Vamos a juntar todas las raíces en una sola para comprobar si se puede simplificar lo que nos quede dentro de esta única raíz.

Empezamos con el numerador de la fracción, uniendo las dos raíces en una y realizando la multiplicación que nos queda dentro:

$$= \frac{\sqrt{6.8x}}{\sqrt{12x}} = \frac{\sqrt{48x}}{\sqrt{12x}} =$$

Tenemos ahora la división de dos raíces. La volvemos a unir en una sola, mediante la propiedad de la división.

Dentro de la raíz nos queda una fracción que se puede simplificar y el resultado de esa simplificación sí que tiene solución entera:

$$= \sqrt{\frac{48x}{12x}} = \sqrt{4} = 2$$

En todo momento debes ir buscando la solución entera de la raíz para aplicar las propiedades de las raíces de la multiplicación y división en un sentido u otro

Tienes que ver si conviene o no la aplicación de una propiedad en un sentido u otro, buscando siempre la solución entera de la raíz.