3. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. RADICALES

3.1. Potencias de exponente racional

Se define la potencia de exponente fraccionario r/s y base a como:

$$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$$

Ejemplo:

- *Exponentes fraccionarios:* $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$

Las propiedades citadas para las potencias de exponente entero son válidas para las potencias de exponentes fraccionarios

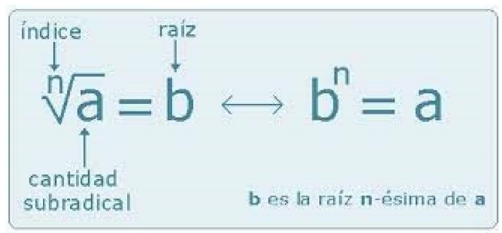
Ejemplo:

- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

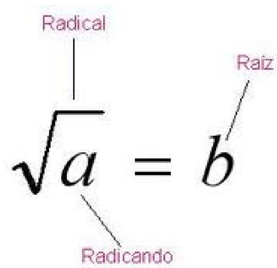
3.2. Radicales

Se define **raíz *n*-sima** de un número a, como el número b que verifica la igualdad $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$



Siendo: n el **índice**, a la cantidad subradical o **radicando** y b es la raíz ***n*-sima** de a



Importante: n siempre es positivo. No existe la raíz –5 de un número.

> La radicación de índice n es la operación inversa de la potenciación de exponente n.
>
> Por la definición de raíz n-ésima de un número a se verifica que si b es raíz, entonces:
>
> $$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Observa que se puede definir: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ ya que: $(a^{1/n})^n = a^{(1/n)\cdot n} = a^1 = a$.

Como $a^{1/n}$ satisface la misma propiedad que b deben ser considerados como el mismo número.

Ejemplos:

- $(81)^{3/4} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = (3)^{12/4} = 3^3 = 27$
- $125^{2/3} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{\left(5^3\right)^2} = \sqrt[3]{5^6} = 5^{6/3} = 5^2 = 25$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

3.3. Propiedades de los radicales

Las propiedades de las potencias enunciadas anteriormente para el caso de exponentes fraccionarios, también se pueden aplicar a las raíces:

a) Si multiplicamos el índice de una raíz n por un número p, y a la vez elevamos el radicando a ese número p el valor de la raíz no varía.

Se verifica $\forall p \neq 0$ que:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.p]{a^p}.$$

Demostración:

$$\sqrt[n.p]{a^p} = a^{\frac{p}{p.n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$. Se verifica puesto que según acabamos de ver: $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3.2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) Para multiplicar raíces del mismo índice, se multiplican los radicandos y se halla la raíz de índice común:

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}.$$

Demostración:

Según las propiedades de las potencias de exponentes enteros se verifica que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

c) Para dividir raíces del mismo índice se dividen los radicandos y se halla la raíz del índice común.

Suponemos que $b \neq 0$ para que tenga sentido el cociente.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Demostración:

Si escribimos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

d) Para elevar un radical a una potencia basta con elevar el radicando a dicha potencia:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Demostración:

Autor: José Antonio Encabo de Lucas y Paco Moya
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Esta propiedad la podemos demostrar como sigue:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

e) La raíz de una raíz es igual a la raíz cuyo índice es el producto de los índices:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

$$m > 0 \, y \, m \in Z$$

Demostración:

Se verifica que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{15} \cdot y^{30}}} = \sqrt[15]{x^{15} \cdot y^{30}} = (x^{15} \cdot y^{30})^{\frac{1}{15}} = (x^{15})^{\frac{1}{15}} \cdot (y^{30})^{\frac{1}{15}} = x \cdot y^2$

Actividades resueltas:

- *Reduce a índice común* (6) *los siguientes radicales:* $\sqrt[3]{536}; \sqrt[2]{70}$

$$\sqrt[3]{536} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 67} = \sqrt[6]{(2^3 \cdot 67)^2};$$

$$\sqrt{70} = \sqrt[2]{2 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3}.$$

- *Saca factores fuera de la raíz:*

$$\sqrt[2]{108} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[2]{3} = 6 \cdot \sqrt[2]{3}$$

- *Escribe los siguientes radicales como una sola raíz:*

$$\frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}.\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}.3} = \sqrt[6]{\frac{3^3.2^4}{2^3.3}} = \sqrt[6]{2.3^2} = \sqrt[6]{18}$$

Actividades propuestas

34. Calcula:

a) $(\sqrt[3]{a^6.b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

35. Halla:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

36. Realiza las siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$