# Raíces y sus propiedades

---

### 1- ¿A qué llamamos raíz de un número?

Una raíz corresponde a un número que, al multiplicarse por sí mismo la cantidad de veces que indique el índice, se obtiene la cantidad subradical.

Sea c un número real y n un número natural mayor que 1. Si $x^n = c$, decimos que **x es la raíz enésima de c,** que se escribe $\sqrt[n]{c}$, es decir, X es el único número real cuya potencia n-ésima es c.

$$X = \sqrt[n]{c} \Leftrightarrow X^n = c \quad , n \neq 0$$

X : es la raíz enésima de c , donde:

n : índice.

c : cantidad subradical.

**Ejemplos:**

$4 = \sqrt[3]{64} \quad \Leftrightarrow \quad 4^3 = 64$

$5 = \sqrt[3]{125} \quad \Leftrightarrow \quad 5^3 = 125$

$2 = \sqrt[4]{16} \quad \Leftrightarrow \quad 2^4 = 16$

**Toda raíz consta de los siguientes elementos:** Raíz, radical, índice y cantidad subradical. Por convención se acostumbra omitir el índice 2 de las raíces cuadradas; por ejemplo $\sqrt[2]{16}$ se escribe $\sqrt{16}$.

## 2- Propiedades

De las propiedades de las potencias se deducen las de los radicales:

### 2.1- Relación de la raíz y la potencia

Existe una estrecha relación entre las potencias y las raíces. En efecto, toda raíz puede ser expresada como una potencia de exponente fraccionario.

$$\boxed{\sqrt[p]{a^{q}} = a^{\frac{q}{p}} \quad , \; p \neq 0}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt{3} = 3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{4}}$$

$$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}$$

De esta propiedad se pueden extraer ciertas conclusiones:

- El índice y el exponente del subradical son simplificables entre sí.

Ejemplos:

$$\sqrt[12]{a^8} = a^{\frac{8}{12}} = a^{\frac{2}{3}} \text{, es decir, } \sqrt[\overset{3}{\cancel{12}}]{a^{\underset{2}{\cancel{8}}}} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[\overset{4}{\cancel{8}}]{3^{\underset{3}{\cancel{6}}}} = \sqrt[4]{3^3}$$

- El índice y el exponente del subradical son amplificables entre sí:

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}} = a^{\frac{6}{9}} = \sqrt[9]{a^6}$$

Al interpretar las raíces como una **potencia de exponente racional** sí es posible realizar algunas operaciones que con exponentes enteros no habríamos podido realizar, ya que en este caso siempre será posible igualar los exponentes.

Por ejemplo
- Para **multiplicar** y **dividir** radicales conviene reducirlos a índice común.
- Para comparar radicales también conviene expresarlos con el mismo índice, pues dados dos números reales positivos a y b, y un número entero positivo n se cumple que:

$$\boxed{a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}}$$

**Ejemplo:** Vamos a comparar $\sqrt[3]{25}$ y $\sqrt{7}$ . Para ello expresamos los radicales con el mismo índice:

$$\sqrt[3]{25} = \sqrt[6]{25^2} = \sqrt[6]{625}$$
$$\sqrt{7} = \sqrt[6]{7^3} = \sqrt[6]{343}$$

Como 625> 343 entonces:

$$\sqrt[6]{625} > \sqrt[6]{343} \Rightarrow \sqrt[3]{25} > \sqrt{7}$$

**Radicales equivalentes.**
Dos o más radicales se dicen equivalentes si las fracciones de los exponentes de las potencias asociadas son equivalentes.

$$\sqrt{4^9} = \sqrt[6]{4^{27}} \qquad \text{por ser } \frac{9}{2} = \frac{27}{6}$$

Dado un radical se pueden obtener infinitos radicales equivalentes, multiplicando o dividiendo el exponente del radicando y el índice de la raíz por un mismo número. **Si se multiplica se llama amplificar** y si **se divide se llama simplificar el radical.**
Un radical es **irreducible**, cuando la fracción de la potencia asociada es irreducible.

**2.2- Multiplicación de raíces de igual índice**

Se conserva el índice y se multiplican los subradicales.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad , n \neq 0$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{3 \cdot 4} = \sqrt[3]{12}$$

**2.3- División de raíces de igual índice.**

Se conserva el índice y se dividen los subradicales.

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$$

o bien

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{50} : \sqrt{2} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = \pm 5$$

**2.4- Composición o descomposición de raíces.**

**a- Composición:** Un factor puede ingresar a una raíz si lo elevo al índice de ella (ingresa como factor del subradical)

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{n} \cdot b} \quad , n \neq 0$$

Ejemplo:

$$2\sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{2^{5} \cdot 9} = \sqrt[5]{32 \cdot 9} = \sqrt[5]{288}$$

**b- Descomposición:** Un factor puede salir de una raíz si dicho factor tiene raíz exacta.

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\sqrt[n]{b} \quad , n \neq 0$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$$

**2.5- Raíz de una raíz**

Se deben multiplicar los índices.

$$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a} \quad , p \wedge q \neq 0$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

**2.6- Suma y resta de raíces.**

Para **sumar o restar** dos radicales, éstos deben ser semejantes.

**Radicales semejantes** son aquellos que **tienen el mismo índice y el mismo radicando**. Pueden diferir únicamente en el coeficiente que los multiplica.
Para comprobar si dos radicales son semejantes o no, se simplifican si se puede y se extraen todos los factores que sea posible.

La suma o resta de radicales semejantes es otro radical semejante a los datos, cuyo coeficiente es igual a la suma o resta de los coeficientes de los radicales.

$$a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = (a \pm c)\sqrt[n]{b}$$

Ejemplo 1:

$$-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} =$$

$$(-1 + 3 - 4 + 8) \cdot \sqrt{2} =$$

$$6\sqrt{2}$$

Ejemplo 2:

$$7\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$$

Agrupamos términos semejantes

$$(7 + 8) \cdot \sqrt{5} + (-6 - 3 - 4) \cdot \sqrt{3}$$

$$15\sqrt{5} - 13\sqrt{3}$$

Ejemplo 3:

$$\sqrt{3} + \sqrt{27} - 2\sqrt{75} =$$

Aplicamos la propiedad de descomposición para obtener términos semejantes

$$\sqrt{3} + \sqrt{3 \cdot 3^2} - 2\sqrt{3 \cdot 5^2} =$$

$$\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3} =$$

$$(1 + 3 - 10)\sqrt{3} =$$

$$-6\sqrt{3}$$

**Recuerda:**

- Un número entero multiplicado por un irracional es **siempre** irracional.
- Un número entero sumado con un irracional es **siempre** irracional.
- Una **raíz exacta** corresponde a un número **racional**.
- Es posible combinar radicales cuando el índice y el radicando de dos o más radicales son iguales. **A los radicales con el mismo índice y radicando se les conoce como radicales semejantes.** Es útil tratar a los radicales de la misma forma que a las variables: los radicales similares pueden sumarse y restarse de la misma manera que las variables. Algunas veces, necesitarás simplificar una expresión radical antes de que sea posible sumar o restar términos semejantes.

Ahora prueba tus conocimientos:

| **Ejercicios** | **Respuestas** |
|---|---|
| a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} =$ | a) $\sqrt{2}$ |
| b) $5\sqrt{5} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{45} =$ | b) $4\sqrt{5}$ |
| c) $2\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{16} =$ | c) $-2\sqrt[3]{3}$ |
| d) $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{12} =$ | d) $3\sqrt{2}$ |